

1. Introdução

O crescimento demográfico aliado à intensa utilização de veículos devido à necessidade diária de locomoção por grande parte da população tem acarretado problemas de ordem estrutural nos grandes centros urbanos, uma vez que a maioria das cidades não dispõe de infraestrutura adequada para controlar o intenso fluxo de trânsito.

Uma estratégia para solucionar esses problemas diz respeito à reconfiguração das redes urbanas. O Problema da Orientação em Redes Fortemente Conexas (*Strong Network Orientation Problem* – SNOP) surge como uma alternativa para a resolução do problema, o qual objetiva minimizar os custos associados às distâncias entre os nós de uma rede urbana por meio do remanejamento das redes já existentes, de tal forma a estabelecer uma configuração de custo mínimo fortemente conexa.

Considerando que se trata de um problema de Otimização em Sistemas de Grande Porte, a utilização de algoritmos exatos e/ou heurísticos possibilita a obtenção de soluções eficientes viáveis para problemas reais e fictícios presentes na literatura. Neste sentido, este trabalho propõe apresentar e discutir os resultados obtidos através da resolução de um modelo para o SNOP utilizando o CPLEX 12.8 e comparando seu desempenho com a estratégia de Benders oferecida pelo solver.

2. Formulação do SNOP

O modelo proposto por [2] para o *Strong Network Orientation Problem* é dado pelas equações (1)-(7).

$$\min \sum_{(i,j) \in A} \sum_{s \in V} c_{ij} f_{ij}^s \quad s.t. \quad (1)$$

$$x_{ij} + x_{ji} = 1 \quad \forall (i,j) \in E \quad (2)$$

$$\sum_{(s,i) \in A} f_{si}^s - \sum_{(i,s) \in A} f_{is}^s = n - 1 \quad \forall s \in V \quad (3)$$

$$\sum_{(j,i) \in A} f_{ji}^s - \sum_{(i,j) \in A} f_{ij}^s = 1 \quad \forall s \in V, i \in V \setminus \{s\} \quad (4)$$

$$f_{ij}^s - (n-1)x_{ij} \leq 0 \quad \forall s \in V, (i,j) \in A \quad (5)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in A \quad (6)$$

$$f_{ij}^s \geq 0 \quad \forall s \in V, (i,j) \in A \quad (7)$$

A função objetivo (1) visa minimizar a soma dos custos associados às distâncias entre os nós da rede a partir de cada nó de origem s . As equações (2) definem a orientação dos arcos (i,j) . As equações (3)-(4) garantem a conservação do fluxo na rede. As inequações (5) impedem fluxos provenientes de arcos inativos. As restrições (6)-(7) definem o domínio das variáveis utilizadas no modelo.

3. Resultados

O modelo foi implementado em C++ utilizando o CPLEX *Optimization Studio* 12.8 em um computador DELL com processador Intel Core i7-4790 de 3.60GHz, 16GB de memória RAM e sistema Windows 10 com arquitetura 64 bits. Foram avaliadas quatorze instâncias por meio da utilização convencional do CPLEX e da estratégia de Benders oferecida pelo solver, conforme mostra a Tabela (1).

Tabela 1: Resultados computacionais entre o SIMPLEX e Benders do CPLEX

Instâncias	Soluções	CPLEX				Benders do CPLEX		
		SO	RL	t(s)	BB	t(s)	gap(%)	BB
9	11	246	152	0.06	43	0.20	0.00	78
	10	284	164	0.05	22	0.11	0.00	34
	Média Geo.:			0.05	30.76	0.15	-	51.49
16	23	912	652	1.45	599	5.37	0.00	8,733
	22	968	664	1.01	383	1.86	0.00	3,268
	20	1,392	780	0.55	257	0.83	0.00	549
	18	1,304	736	0.17	47	0.17	0.00	56
	Média Geo.:			0.61	229.44	1.0921	-	967.83
25	39	2,638	2,024	89.06	6464	*	2.26	*
	38	2,748	2,048	60.69	4998	30,103.09	0.00	1,749,779
	36	3,032	2,112	13.51	2310	2,258.06	0.00	231,410
	34	3,116	2,116	6.09	749	105.37	0.00	27,071
	Média Geo.:			25.83	2,734.31	-	-	-
36	59	6,244	5,060	24,865.17	16,032,847	*	15.73	*
	58	6,356	5,092	7,465.00	122,621	*	15.30	*
	56	6,764	5,176	4,001.34	81,417	*	15.49	*
	54	7,006	5,336	176.67	4,588	*	9.08	*
	Média Geo.:			3,384.53	164,618.45	-	-	-
Média Geo. Global:			14.79	317.89	-	-	-	

SO = Solução Ótima, RL = Relaxação Linear, BB = nós de *Branch-and-Bound* explorados

*Instâncias não resolvidas em 24 horas de processamento

Para o cálculo do *gap*, utilizou-se a equação dada em (8).

$$gap(\%) = \frac{100 * (\limite superior - limite inferior)}{\limite superior} \quad (8)$$

A Média Geométrica (9) foi utilizada como referência para observação e comparação dos tempos médios de resolução de cada grupo de instâncias de tamanho n e de um modo global, bem como o número de nós de *Branch-and-Bound* explorados. Nota-se que, para os grupos de instâncias em que há *gap* associado a uma delas, a Média não pode ser calculada.

$$Media Geo. = \sqrt[n]{t_1 * t_2 * \dots * t_n} \quad (9)$$

Verifica-se na Tabela (1) que a resolução das instâncias via CPLEX é mais rápida e eficiente do que a utilização do método de Benders do CPLEX que, por sua vez, não resolve completamente em 24 horas de processamento a instância de 25 nós e 39 arcos, assim como todas as que possuem 36 nós.

4. Benchmarking dos dados

Autores em [1] propuseram um método de *benchmarking* que permite comparar o desempenho de algoritmos em situações distintas por meio de um gráfico de distribuição cumulativa de probabilidade que, dado um intervalo de tempo τ , mostra qual estratégia de resolução apresenta melhor performance.

Considere que $q \in \mathcal{Q}$ representa o conjunto de instâncias do SNOP. Considere também que $s \in \mathcal{S}$ representa o conjunto de algoritmos utilizados para a resolução do problema, assim como variável $t_{q,s}$ representa o tempo requerido para que o algoritmo s resolva a instância q . Neste contexto, pode-se estabelecer uma relação de performance dada por $r_{q,s}$ e expressa na equação (10).

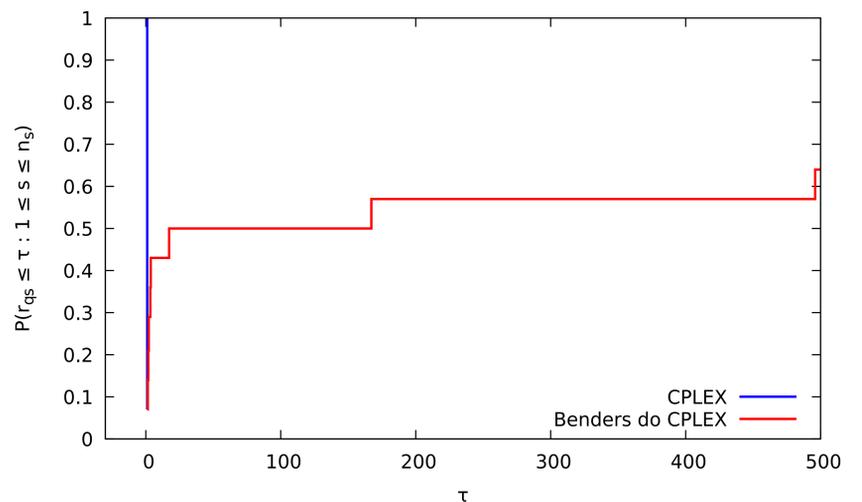
$$r_{q,s} = \frac{t_{q,s}}{\min\{t_{q,s} : s \in \mathcal{S}\}} \quad (10)$$

A performance de cada algoritmo s é obtida por meio do cálculo da probabilidade \mathcal{P} de se resolver o maior número de instâncias s em um tempo $\tau \in \mathbb{R}$, tendo como base os valores de $r_{q,s}$. A função de distribuição cumulativa de probabilidade é descrita em (11), em que n_p representa a quantidade de instâncias utilizadas.

$$\mathcal{P}_s(\tau) = \frac{1}{n_p} \text{size}\{q \in \mathcal{Q} : r_{q,s} \leq \tau\} \quad (11)$$

O gráfico (1) apresenta no eixo das abscissas o tempo τ e no eixo das ordenadas a probabilidade \mathcal{P} de $r_{q,s}$ ser menor que um τ considerando o conjunto de instâncias testadas.

Gráfico 1: Resultados Computacionais



Verifica-se que, ao restringir τ em um valor entre 1 e 100, todas as instâncias foram resolvidas via CPLEX (linha azul), ao contrário da estratégia de Benders do solver (linha vermelha) que, dado o mesmo intervalo, resolve apenas cerca de 50% das instâncias.

5. Conclusões

Ao analisar a Tabela (1) e o Gráfico (1) pode-se inferir que a utilização do método de Decomposição de Benders do solver do CPLEX não se mostrou eficiente na medida em que promove a exploração de um quantitativo de nós de *Branch-and-Bound* e tempo computacional muito superior à utilização do CPLEX via método SIMPLEX.

Além disso, para o conjunto de instâncias que apresenta maior número de nós e arcos, a resolução via Benders do CPLEX não atinge a solução ótima do problema, apresentando *gap* suficientemente alto após 24 horas de execução do algoritmo.

Referências

- [1] Dolan, Elizabeth D., Moré, Jorge J. 2002, Benchmarking optimization software with performance profiles, *Mathematical Programming*, (91), 201-213.
[2] Martins, A. X., Duhamel, C., Santos, A. C. 2017, A column generation approach for the strong network orientation problem, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, (62), 75-80.

AGRADECIMENTOS

