Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP

Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas

Departamento de Engenharia de Produção

Laboratório de Simulação e Otimização de Sistemas

Desenvolvimento analítico do caso geral do ponto de equilíbrio de um modelo de teoria dos jogos

Felipo Bacani, Thiago Augusto de Oliveira

João Monlevade, Dezembro de 2020

Definições iniciais: Expressão do lucro e sua derivada

Todas as definições deste relatório técnico estão de acordo com [1]. O faturamento obtido pelo produto ℓ no mercado, denotado $B_{\ell\,(\boldsymbol{p})}$, é dado pelo produto do preço do produto p_ℓ e seu volume de vendas $\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}$:

$$B_{\ell\,(\boldsymbol{p})} = p_\ell \cdot \Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})} \tag{1}$$

Usando o faturamento para cada produto (1) e seu custo de produção c_ℓ, a equação do lucro da empresa f é dada por:

$$\begin{aligned}
\Pi_f(\boldsymbol{p}) &= \sum_{\ell \in K_f} \left[B_{\ell\,(\boldsymbol{p})} - c_\ell\big(\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}\big)^2\right] = \sum_{\ell \in K_f} \left[p_\ell \cdot \Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})} - c_\ell\big(\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}\big)^2\right] \\
\Pi_f(\boldsymbol{p}) &= \sum_{\ell \in K_f} \left[\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})} \cdot \big(p_\ell - c_\ell\,\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}\big)\right]
\end{aligned} \tag{2}$$

A derivada do lucro (2) com relação à p_k, onde $k \in K_f$, usando a derivada do produto, é dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\,[\Pi_f(\boldsymbol{p})]}{\partial p_k} &= \sum_{\ell \in K_f} \left[\frac{\partial\,\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}}{\partial p_k} \cdot \big(p_\ell - c_\ell\,\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}\big) + \Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})} \cdot \frac{\partial}{\partial p_k}\big(p_\ell - c_\ell\,\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}\big)\right] \\
&= \sum_{\ell \in K_f} \left[\frac{\partial\,\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}}{\partial p_k} \cdot \big(p_\ell - c_\ell\,\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}\big) + \Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})} \cdot \left(\delta_k(\ell) - c_\ell\,\frac{\partial\,\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}}{\partial p_k}\right)\right] \\
&= \sum_{\ell \in K_f} \left[\delta_k(\ell) \cdot \Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})} + \frac{\partial\,\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}}{\partial p_k} \cdot \big(p_\ell - 2c_\ell\,\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}\big)\right] \\
\frac{\partial\,[\Pi_f(\boldsymbol{p})]}{\partial p_k} &= \Delta_{k\,(\boldsymbol{p})} + \sum_{\ell \in K_f} \left[\frac{\partial\,\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}}{\partial p_k} \cdot \big(p_\ell - 2c_\ell\,\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}\big)\right]
\end{aligned} \tag{3}$$

Segunda derivada e condição para mínimo local

A matriz hessiana do lucro associada a cada empresa f, denotada $H_f(\boldsymbol{p})$, necessária para obter as condições de que o ponto de equilíbrio do lucro é um máximo local, depende da segunda derivada parcial em termos de p_m ($m \in K_f$). O elemento (m, k) da matriz $H_f(\boldsymbol{p})$ é dado por:

$$(H_f(\boldsymbol{p}))_{m,k} = \frac{\partial^2[\Pi_f(\boldsymbol{p})]}{\partial p_m\,\partial p_k}, \tag{4}$$

onde $m, k \in K_f$.

Dado um ponto crítico da função lucro $\boldsymbol{p}^*$, se a matriz hessiana $H_f(\boldsymbol{p}^*)$ de cada empresa f for simétrica e tiver apenas autovalores negativos, concluímos que a função lucro atinge um máximo local no ponto crítico $\boldsymbol{p}^*$.

Os elementos da matriz $H_f(\boldsymbol{p})$ são dados por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2[\Pi_f(\boldsymbol{p})]}{\partial p_m\,\partial p_k} &= \frac{\partial\,\Delta_{k\,(\boldsymbol{p})}}{\partial p_m} + \sum_{\ell \in K_f} \left[\frac{\partial^2\,\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}}{\partial p_m\,\partial p_k} \cdot \big(p_\ell - 2c_\ell\,\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}\big) + \frac{\partial\,\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial\,\big[p_\ell - 2c_\ell\,\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}\big]}{\partial p_m}\right] \\
&= \frac{\partial\,\Delta_{k\,(\boldsymbol{p})}}{\partial p_m} + \sum_{\ell \in K_f} \left[\frac{\partial^2\,\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}}{\partial p_m\,\partial p_k} \cdot \big(p_\ell - 2c_\ell\,\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}\big) + \frac{\partial\,\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}}{\partial p_k} \cdot \left(\delta_m(\ell) - 2c_\ell \cdot \frac{\partial\,\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}}{\partial p_m}\right)\right] \\
&= \frac{\partial\,\Delta_{k\,(\boldsymbol{p})}}{\partial p_m} + \sum_{\ell \in K_f} \left[\delta_m(\ell) \cdot \frac{\partial\,\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}}{\partial p_m} + \frac{\partial^2\big[\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}\big]}{\partial p_m\,\partial p_k} \cdot \big(p_\ell - 2c_\ell\,\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}\big) - 2c_\ell \cdot \left(\frac{\partial\,\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial\,\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}}{\partial p_m}\right)\right] \\
\frac{\partial^2[\Pi_f(\boldsymbol{p})]}{\partial p_m\,\partial p_k} &= \frac{\partial\,\big[\Delta_{k\,(\boldsymbol{p})}\big]}{\partial p_m} + \frac{\partial\,\big[\Delta_{m\,(\boldsymbol{p})}\big]}{\partial p_m} + \sum_{\ell \in K_f} \left[\frac{\partial^2\big[\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}\big]}{\partial p_m\,\partial p_k} \cdot \big(p_\ell - 2c_\ell\,\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}\big) - 2c_\ell \cdot \left(\frac{\partial\,\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial\,\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}}{\partial p_m}\right)\right]
\end{aligned} \tag{5}$$

Supondo que $\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}$ é contínua e tem suas primeiras e segundas derivadas parciais contínuas (como será visto na Eq. 6 adiante), pelo Teorema de Schwarz temos que a matriz (4) é simétrica. Portanto resta mostrar a condição dos autovalores negativos no ponto crítico.

O volume de vendas $\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}$ e suas derivadas parciais

Pelas equações (3) e (5), nota-se que tanto as derivadas parciais de primeira e segunda ordens do lucro de uma empresa f dependem das constantes do problema e do volume de vendas do produto ℓ dessa empresa $\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}$ (e suas derivadas parciais). Esta seção dedica-se à estes cálculos.

Ainda na referência [1], define-se o volume das vendas pela expressão

$$\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})} = \sum_{\boldsymbol{v}\in\Psi}\Big(\mathbb{P}^{\boldsymbol{v}}_{\ell\,(\boldsymbol{p})}\cdot q^{\boldsymbol{v}}\Big),$$

onde $q^{\boldsymbol{v}}$ é a probabilidade de um cliente estar em $\boldsymbol{v}$ e $\mathbb{P}^{\boldsymbol{v}}_{\ell\,(\boldsymbol{p})}$ é a probabilidade de um cliente localizado em $\boldsymbol{v}$ comprar o produto ℓ, onde esta última é dada por:

$$\mathbb{P}^{\boldsymbol{v}}_{\ell\,(\boldsymbol{p})} = \frac{\text{NA}^{\boldsymbol{v}}_{\ell} + \gamma(a-p_\ell)}{\sum\limits_{m\in K}[\text{NA}^{\boldsymbol{v}}_{m} + \gamma(a-p_m)]} = \frac{f^{\boldsymbol{v}}_{\ell} - \gamma p_\ell}{\sum\limits_{m\in K}[f^{\boldsymbol{v}}_{m} - \gamma p_m]} = \frac{h^{\boldsymbol{v}}_{\ell}(p_\ell)}{\sum\limits_{m\in K}[h^{\boldsymbol{v}}_{m}(p_m)]} = \frac{h^{\boldsymbol{v}}_{\ell}(p_\ell)}{G^{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{p})}} \tag{6}$$

onde $h^{\boldsymbol{v}}_{\ell}(p_\ell) = (f^{\boldsymbol{v}}_{\ell} - \gamma p_\ell)$ e $f^{\boldsymbol{v}}_{\ell} = (\text{NA}^{\boldsymbol{v}}_{\ell} + \gamma\, a)$.

Para o cálculo do lucro de cada empresa, é necessário o cálculo das derivadas de $\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}$, e logo de $\mathbb{P}^{\boldsymbol{v}}_{\ell\,(\boldsymbol{p})}$. Será usada a regra de derivada do quociente em $\mathbb{P}^{\boldsymbol{v}}_{\ell\,(\boldsymbol{p})}$, $(\frac{F}{G})' = \frac{F'G - FG'}{G^2}$, para $F = h^{\boldsymbol{v}}_{\ell}(p_\ell)$ e $G = G^{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{p})}$. A derivada do numerador de $\mathbb{P}^{\boldsymbol{v}}_{\ell\,(\boldsymbol{p})}$ é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial p_k}[h^{\boldsymbol{v}}_{\ell}(p_\ell)] = \frac{\partial}{\partial p_k}[f^{\boldsymbol{v}}_{\ell} - \gamma p_\ell] = \begin{cases} -\gamma & \text{, se } k=\ell, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} = -\gamma\,\delta_k(\ell) \tag{7a}$$

onde $\delta_k(\ell) = \begin{cases} 1, & k=\ell \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ é a função delta de Dirac. A vantagem de trabalharmos com a função delta de Dirac $\delta_k(\ell)$ é que conseguimos escrever os casos $\ell = k$ e $\ell \neq k$ *ao mesmo tempo*.

Derivando o denominador de $\mathbb{P}^{\boldsymbol{v}}_{\ell\,(\boldsymbol{p})}$, $G^{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{p})} = \sum\limits_{m\neq k}[h^{\boldsymbol{v}}_{m}(p_m)] + h^{\boldsymbol{v}}_{k}(p_k)$:

$$\frac{\partial}{\partial p_k}\Big(G^{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{p})}\Big) = \frac{\partial}{\partial p_k}\left(\sum_{m\neq k}[h^{\boldsymbol{v}}_{m}(p_m)] + h^{\boldsymbol{v}}_{k}(p_k)\right) = \sum_{m\neq k}\overbrace{\frac{\partial}{\partial p_k}h^{\boldsymbol{v}}_{m}(p_m)}^{=0 \text{ pois } m\neq k, \text{Eq.(7a)}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial p_k}h^{\boldsymbol{v}}_{k}(p_k)}_{=-\gamma,\ \text{Eq. (7a)}} = -\gamma \tag{7b}$$

Agora substituindo (7a-b) em (6) na regra do quociente, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial p_k}[\mathbb{P}^{\boldsymbol{v}}_{\ell\,(\boldsymbol{p})}] &= \frac{\Big[\frac{\partial}{\partial p_k}[h^{\boldsymbol{v}}_{\ell}(p_\ell)]\Big]\cdot G^{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{p})} - [h^{\boldsymbol{v}}_{\ell}(p_\ell)]\cdot \overbrace{\frac{\partial}{\partial p_k}\Big(G^{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{p})}\Big)}^{\text{Eq. (7b)}}}{(G^{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{p})})^2} \\
\frac{\partial}{\partial p_k}[\mathbb{P}^{\boldsymbol{v}}_{\ell\,(\boldsymbol{p})}] &= \frac{[-\gamma\,\delta_k(\ell)]\cdot G^{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{p})} - [h^{\boldsymbol{v}}_{\ell}(p_\ell)](-\gamma)}{(G^{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{p})})^2} = \frac{-\gamma\,\delta_k(\ell)}{G^{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{p})}} + \frac{\gamma\,[h^{\boldsymbol{v}}_{\ell}(p_\ell)]}{(G^{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{p})})^2}
\end{aligned} \tag{8}$$

Agora usando (8) para determinar $\dfrac{\partial\,[\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}]}{\partial p_k}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial p_k}[\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}] &= \frac{\partial}{\partial p_k}\left[\sum_{\boldsymbol{v}\in\Psi}\mathbb{P}^{\boldsymbol{v}}_{\ell\,(\boldsymbol{p})}\cdot q^{\boldsymbol{v}}\right] = \sum_{\boldsymbol{v}\in\Psi}\frac{\partial}{\partial p_k}[\mathbb{P}^{\boldsymbol{v}}_{\ell\,(\boldsymbol{p})}]\cdot q^{\boldsymbol{v}} = \sum_{\boldsymbol{v}\in\Psi}\left[\frac{-\gamma\,\delta_k(\ell)}{G^{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{p})}} + \frac{\gamma\,[h^{\boldsymbol{v}}_{\ell}(p_\ell)]}{(G^{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{p})})^2}\right]\cdot q^{\boldsymbol{v}} \\
\frac{\partial}{\partial p_k}[\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}] &= -\gamma\,\delta_k(\ell)\left(\sum_{\boldsymbol{v}\in\Psi}\frac{q^{\boldsymbol{v}}}{G^{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{p})}}\right) + \gamma\left(\sum_{\boldsymbol{v}\in\Psi}\frac{h^{\boldsymbol{v}}_{\ell}(p_\ell)\,q^{\boldsymbol{v}}}{(G^{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{p})})^2}\right)
\end{aligned} \tag{9}$$

A expressão (9) pode ser substituída em (3), de forma a obter as expressões que impõem a condição de primeira ordem para existência de ponto extremo.

Agora determinando $\dfrac{\partial^2\left[\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}\right]}{\partial p_m\,\partial p_k}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\big[\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}\big]}{\partial p_m\,\partial p_k} &= \frac{\partial}{\partial p_m}\left[\frac{\partial\,\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}}{\partial p_k}\right] = \frac{\partial}{\partial p_m}\left[-\gamma\,\delta_k(\ell)\left(\sum_{\boldsymbol{v}\in\Psi}\frac{q^{\boldsymbol{v}}}{G^{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{p})}}\right)+\gamma\left(\sum_{\boldsymbol{v}\in\Psi}\frac{h^{\boldsymbol{v}}_{\ell}(p_\ell)\,q^{\boldsymbol{v}}}{(G^{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{p})})^2}\right)\right] \\
&= -\,\gamma\,\delta_k(\ell)\cdot\frac{\partial}{\partial p_m}\left(\sum_{\boldsymbol{v}\in\Psi}\frac{q^{\boldsymbol{v}}}{G^{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{p})}}\right)+\gamma\frac{\partial}{\partial p_m}\left(\sum_{\boldsymbol{v}\in\Psi}\frac{h^{\boldsymbol{v}}_{\ell}(p_\ell)\,q^{\boldsymbol{v}}}{(G^{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{p})})^2}\right) \\
&= -\,\gamma\,\delta_k(\ell)\cdot\left(\sum_{\boldsymbol{v}\in\Psi}q^{\boldsymbol{v}}\left[\frac{-\frac{\partial\left[G^{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{p})}\right]}{\partial p_m}}{(G^{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{p})})^2}\right]\right)+\gamma\left(\sum_{\boldsymbol{v}\in\Psi}q^{\boldsymbol{v}}\left[\frac{\frac{\partial[h^{\boldsymbol{v}}_{\ell}(p_\ell)]}{\partial p_m}\cdot(G^{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{p})})^2-h^{\boldsymbol{v}}_{\ell}(p_\ell)\cdot\frac{\partial\left[(G^{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{p})})^2\right]}{\partial p_m}}{(G^{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{p})})^4}\right]\right) \\
&= -\,\gamma\,\delta_k(\ell)\cdot\left(\sum_{\boldsymbol{v}\in\Psi}q^{\boldsymbol{v}}\left[\frac{-(-\gamma)}{(G^{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{p})})^2}\right]\right)+\gamma\left(\sum_{\boldsymbol{v}\in\Psi}q^{\boldsymbol{v}}\left[\frac{-\gamma\,\delta_m(\ell)\,(G^{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{p})})^2-h^{\boldsymbol{v}}_{\ell}(p_\ell)\cdot(2\,G^{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{p})})\frac{\partial\left[G^{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{p})}\right]}{\partial p_m}}{(G^{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{p})})^4}\right]\right) \\
&= -\,\gamma^2\,\delta_k(\ell)\cdot\left(\sum_{\boldsymbol{v}\in\Psi}\left[\frac{q^{\boldsymbol{v}}}{(G^{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{p})})^2}\right]\right)+\gamma\left(\sum_{\boldsymbol{v}\in\Psi}q^{\boldsymbol{v}}\left[\frac{-\gamma\,\delta_m(\ell)\,G^{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{p})}+h^{\boldsymbol{v}}_{\ell}(p_\ell)\cdot(2\gamma)}{(G^{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{p})})^3}\right]\right) \\
&= -\,\gamma^2\,\delta_k(\ell)\cdot\left(\sum_{\boldsymbol{v}\in\Psi}\left[\frac{q^{\boldsymbol{v}}}{(G^{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{p})})^2}\right]\right)-\delta_m(\ell)\,\gamma^2\left(\sum_{\boldsymbol{v}\in\Psi}\left[\frac{q^{\boldsymbol{v}}}{(G^{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{p})})^2}\right]\right)+2\gamma^2\left(\sum_{\boldsymbol{v}\in\Psi}\left[\frac{h^{\boldsymbol{v}}_{\ell}(p_\ell)\cdot q^{\boldsymbol{v}}}{(G^{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{p})})^3}\right]\right) \\
\frac{\partial^2\big[\Delta_{\ell\,(\boldsymbol{p})}\big]}{\partial p_m\,\partial p_k} &= -\,\gamma^2\Big[\delta_k(\ell)+\delta_m(\ell)\Big]\left(\sum_{\boldsymbol{v}\in\Psi}\left[\frac{q^{\boldsymbol{v}}}{(G^{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{p})})^2}\right]\right)+2\gamma^2\left(\sum_{\boldsymbol{v}\in\Psi}\left[\frac{h^{\boldsymbol{v}}_{\ell}(p_\ell)\cdot q^{\boldsymbol{v}}}{(G^{\boldsymbol{v}}_{(\boldsymbol{p})})^3}\right]\right) \qquad (10)
\end{aligned}
$$

A expressão (10) pode ser substituída em (5), de forma a obter os elementos da matriz hessiana.

Obtenção de pontos de equilíbrio e verificação da condição de mínimo local

Ainda não foi possível verificar, para o caso geral, a existência de um mínimo local para quaisquer valores de parâmetro, ou mesmo a existência de um ponto extremo. Todos os avanços que tivemos até o momento foram feitos para casos específicos gerados aleatoriamente a partir de simulações. Nestes casos, para todas os casos simulados que avaliamos, observamos que a existência de ponto extremo e a condição para mínimo local foram satisfeitas com sucesso.

Referências Bibliográficas

[1] Silva, B. F. da and Silva, T. A. de O. and Silva, S. E., *Análise de estratégias das montadoras atuantes na indústria brasileira de caminhões a partir da Teoria dos Jogos*, XXV Simpósio de Engenharia de Produção (SIMPEP), Bauru, Novembro de, 2018. 14, 15